

EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS – UMA REVISÃO DE LITERATURA

André Tiago Santos

Professor de Educação Básica, Técnica e Tecnológica Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - campus Registro. Laboratório: Eletroeletrônica - Automação - Mecatrônica;
andre.tiago@ifsp.edu.br, Andre.eng.autom@gmail.com

RESUMO Este estudo tem como objetivo discutir o emprego das Equações de Diferenças em aplicações diversas, observando as pesquisas atuais, modos de aplicação e o mecanismo dos sistemas descritos por tais modelos. Trata-se de uma revisão bibliográfica baseada na literatura especializada através de consulta a artigos científicos e trabalhos selecionados através de busca no banco de dados do Scielo e do Google Scholar. Os estudos encontrados sobre o emprego de tais equações apontaram que este modelo de controle é usado em diversos algoritmos e implementado em alguns métodos de análise de dados. Dentre todos os trabalhos dos quais descreveram as implementações das Equações de Diferenças, trabalharam com a abundância suficiente de informações relativas aos conceitos deste modelo, e, a aplicação desta Equação em diversas áreas do conhecimento, desde Economia, passando pela Engenharia Elétrica, Física e Biologia. De fato, pode-se denotar modelos matemáticos conceituados em variáveis discretas. Uma boa fração destes descreveram modelos matemáticos diversos e, a fração complementar, na área de Ensino de Matemática, exemplificando diversas modelagens resolvidas. Ainda são necessários mais estudos sobre o emprego desse modelo matemático discreto, já que as pesquisas feitas atualmente têm sua relevante importância e permitem o uso destas Equações profusamente.

PALAVRAS-CHAVE: Equações de Diferenças, Modelos Discretos, Revisão Bibliográfica.

ABSTRACT. This study aims to discuss the use of the Difference Equations in different applications, observing the current research, application modes and the mechanism of the systems described by such models. It is a bibliographic review based on specialized literature through consultation of scientific articles and selected works by searching the database of Scielo and Google Scholar. The studies found on the use of such equations pointed out that this control model is used in several algorithms and implemented in some methods of data analysis. Among all the works from which they described the implementations of the Difference Equations, they worked with a sufficient abundance of information related to the concepts of this model, and the application of this Equation in several areas of knowledge, from Economics to Electrical Engineering, Physics and Biology. In fact, one can denote mathematical models conceptualized in discrete variables. A good fraction of these described different mathematical models and, the complementary fraction, in the area of Teaching Mathematics, exemplifying several solved models. Further studies are still needed on the use of this discrete mathematical model, since the research currently carried out is of relevant importance and allows the use of these Equations to be profusely.

KEYWORDS: Difference Equations, Discrete Models, FPGA, Literature Review.

1 INTRODUÇÃO.

Em diversas modelagens matemáticas de fenômenos físicos, químicos e/ou biológicos, o tempo, que costuma ser a variável independente, varia continuamente. Deste modo, a variação é

uma grandeza infinitesimal e as mudanças na variável dependente podem ser descritas por derivadas (taxas de variação).

Nesses casos, usa-se as equações diferenciais para construir modelos matemáticos que descrevam melhor, em termos numéricos, um determinado fenômeno. Mas há modelos onde o tempo varia discretamente, isto é, assume apenas valores inteiros. Assim, não se justificaria utilizar as equações diferenciais para modelar esses fenômenos, pois o conceito de derivada perderia sua aplicabilidade. Nesses casos, são usadas as equações de diferenças para o desenvolvimento do modelo matemático. Ao construir um modelo matemático, em diversas circunstâncias, interessa escolher uma variável que tome valores discretos. Assim ocorre, por exemplo, com o tempo, já que é muito comum realizar medições regulares (em passos), de hora em hora ou de mês em mês, no sentido de controlar um experimento.

Uma equação de diferenças é qualquer problema onde deve-se determinar uma função (desconhecida) a partir de uma relação de recorrência. Relação de recorrência (ou passo recorrente) é uma técnica matemática que permite definir uma regra para calcular qualquer termo de uma sequência ou conjunto em função do(s) antecessor(es) imediato(s). Um exemplo disso é a execução computacional para o cálculo do fatorial de modo recorrente, como seguinte pseudocódigo (Quadro 1):

```
função  $Fat(n)$   
  se  $n < 2$  então  
    retorne 1  
  caso contrário  
    retorne  $n \times Fat(n - 1)$ 
```

Quadro 1 – Pseudocódigo para cálculo do Fatorial de modo recorrente. Fonte (WIKIPÉDIA, 2021)

Em sistemas eletrônicos embarcados, como nos sistemas com processadores e microcontroladores, os ruídos podem ser ocasionados por diversas formas, as mais comuns são os ruídos que vem da fonte de alimentação, ruídos por capacitância parasita dos cabos e por indução eletromagnética nos fios. Toda vez que uma corrente elétrica percorre por um fio condutor ela gera um campo magnético no fio, e esse campo magnético pode gerar uma tensão em outro fio, que gera o ruído caso essa corrente for oscilante. Daí a importância do uso dos filtros digitais, que "limpam" este sinal do ruído proveniente. Os filtros digitais para processamento de sinais usam dos conceitos de Equações de Diferenças em suas programações computacionais.

O objetivo geral deste trabalho, destarte, é realizar uma revisão de literatura sobre a correlação entre trabalhos diversos realizados no que tange às Equações de Diferenças, seus conceitos e aplicações.

No capítulo 1 estão apresentados a justificativa, problema de pesquisa, relevância deste trabalho, bem como o objetivo geral para desenvolvimento deste objeto de pesquisa.

O capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica, que conceitua, define e mostra as classificações de tais Equações e que são referenciais teóricos para este trabalho.

Os métodos adotados são descritos no terceiro capítulo, em que são detalhados os modos de pesquisa para a consolidação desta Revisão de Literatura, bases de dados e o período no qual a pesquisa foi feita.

O capítulo 4 aborda resultados obtidos das pesquisas feitas, para a conexão com os itens conceituais, experimentando os modelos matemáticos teóricos e aplicando-os para este desenvolvimento.

E, por fim, o quinto capítulo conclui com a análise dos resultados obtidos da pesquisa realizada e estabelece uma proposta de trabalhos futuros, com avanços e incrementos adicionais em termos de aprimoramento e evolução deste tipo de Equação nesta aplicação e em demais aplicações nas quais envolvem ensino, pesquisa e inovação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

Serão apresentados, nesta seção, o embasamento teórico para a conceituação de Equações de Diferenças, bem como o referencial técnico-científico para se desenvolver tal embasamento.

A discretização se define como a individualização, partição, de uma unidade contínua em unidades e elementos distintos não continuados. É um processo que divide algo em partes menores e menos complexas (DICIO, 2009). As seguintes figuras 1 e 2 exemplificam as variações contínua e discreta.

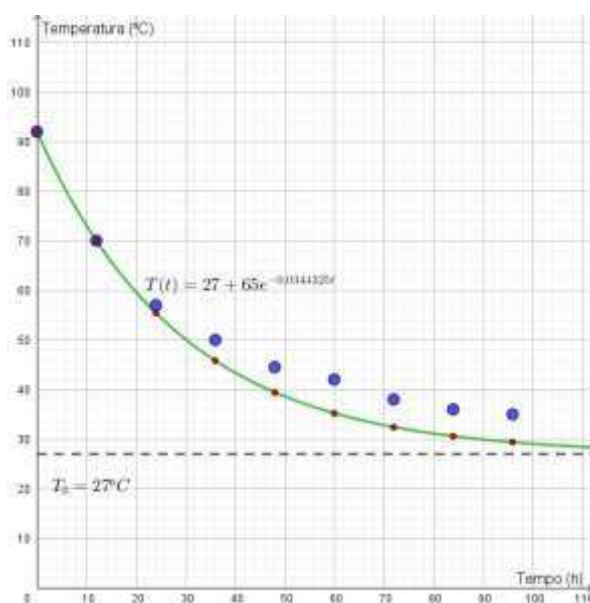


Figura 1 – Variação contínua da temperatura de uma garrafa térmica em função do tempo (Fonte: FAGUNDES *et al.*, 2019).

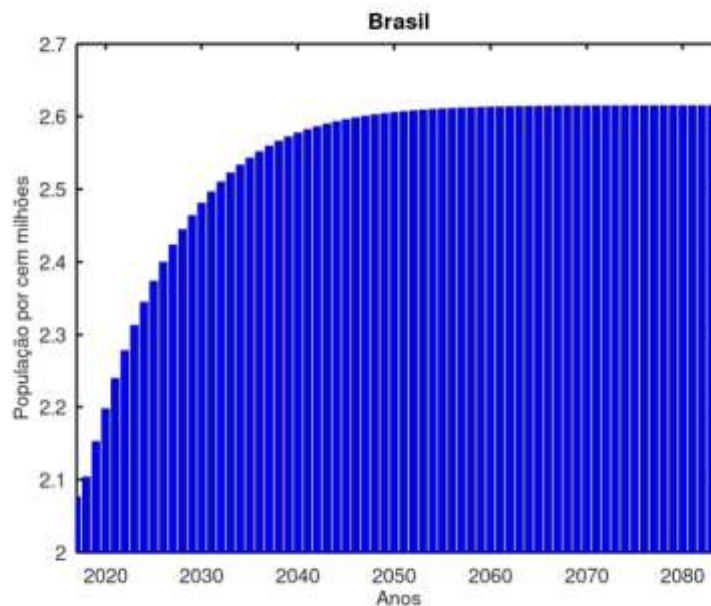


Figura 2 – Projeção discretizada da população brasileira via modelo logístico (Fonte: ALVES; GARCIA, 2020).

De modo geral, as equações de diferenças descrevem o comportamento de problemas dos quais a variação em cada intervalo de tempo se dá de forma discreta, não contínua (FELIX, 2018). Assim, tais equações descrevem a evolução de fenômenos transientes e estacionários ao longo do tempo, onde as características da partícula de estudo no instante $n + 1$ são funções das características da mesma no instante n . Denota-se, deste modo, tal relação pela seguinte equação de diferença:

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (1)$$

Pode-se classificar as equações de diferenças como lineares e não lineares. Nas equações de diferenças lineares, o membro $f(x(n))$ tem como função que obedeça ao princípio da superposição. O contrário ocorre nas equações de diferenças não lineares. Segue-se alguns exemplos de equações de diferenças:

$$x(n) = 2x(n-1) + 5x(n-2) \text{ linear de ordem 2;}$$

$$x(n+1) = 3[x(n)]^2 + 7 \text{ não-linear;}$$

$$x(n) = 2x(n-1) + 5 \text{ linear de ordem 1;}$$

$$x(n+3) = 4x(n+1) - 5x(n) \text{ linear de ordem 3;}$$

Em muitos casos, é interessante modelar a evolução de algum sistema ao longo do tempo. São dois os casos distintos. Pode-se pensar no tempo como uma variável contínua, ou pode-se pensar no tempo como uma variável discreta. O primeiro caso geralmente leva a equações diferenciais. Não serão discutidas equações diferenciais neste trabalho.

Considera-se um período de tempo T e é observado (ou medido) o sistema nos tempos $t = f(nT)$, $n \in \mathbb{N}_0$ (considera-se $\mathbb{N}_0$ como $\mathbb{N} \cup \{0\}$ – conjunto dos números naturais incluído nulo). O resultado é uma sequência $x(0), x(1), x(2), \dots$; em alguns casos, esses valores são obtidos de uma função f , que é definida para todo $t \geq 0$. Este método de obtenção dos valores é chamado de amostragem periódica. Um modela o sistema usando uma equação de diferença, ou o que às vezes é chamado de relação de recorrência. Nesta subseção, serão considerados os casos mais simples primeiramente, ou seja, as equações de diferenças lineares de ordem 1, após, as de ordem 2 e, finalmente, as equações de diferenças não-lineares.

Equações de Diferenças Lineares de 1ª ordem.

Uma equação de diferenças de ordem 1, linear, é escrita deste modo:

$$x(n+1) - ax(n) = c \quad (2)$$

para $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se $c = 0$, a equação é denominada como sendo homogênea, caso contrário será denominada como sendo não homogênea. Observa-se os seguintes exemplos:

$x(n+1) = -x(n)$	<i>linear e homogênea;</i>
$x(n+1) = -x(n) + 6n$	<i>linear e não homogênea.</i>

Sejam $a(n)$ e $c(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sequências reais. Então, a equação de diferença linear de primeira ordem $x(n+1) = ax(n) + c(n)$ com condição inicial $x(0) = x_0$, tem a solução:

$$x(n) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} a(k) \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} a(j) \right) c(k). \quad (3)$$

dadas as sequencias de iterações sucessivas para se encontrar a solução de tal equação.

Exemplo (FELIX, 2018): Dado $x(1) = 1/2$, encontre a solução para a equação de diferenças:

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n$$

Resolução:

Para $n = 0$

$$x(1) = 2x(0) + 3^0$$

$$\frac{1}{2} = 2x(0) + 1$$

$$\frac{1}{2} - 1 = 2x(0)$$

$$x(0) = -\frac{1}{4}$$

Logo

$$\begin{aligned} x(n) &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} a(k) \right) x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} a(j) \right) c(k) \\ &= \left[\prod_{k=0}^{n-1} 2 \right] \left(-\frac{1}{4} \right) + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{k=r+1}^{n-1} 2 \right] 3^r \\ &= 2^n \left(-\frac{1}{4} \right) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(2^{n-r-1} \right) 3^r \\ &= -2^{n-2} + 2^{n-1} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2} \right)^r \\ &= -2^{n-2} + 2^{n-1} \cdot \left[\frac{\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} \right] \\ &= -2^{n-2} + 2^n \cdot \frac{3^n}{2^n} - 2^{n-1} \\ &= 3^n - 5 \cdot 2^{n-2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Define-se a sequência $x(n)$ pela sua solução. E é facilmente mostrado que satisfaz a equação de diferenças linear e a condição inicial.

Equações de Diferenças Lineares de 2ª ordem.

Será apresentada agora a teoria das equações de diferença linear de segunda ordem. Em contraste com o caso de primeira ordem, não existe uma fórmula geral que forneça a solução para todas essas equações. É preciso impor condições adicionais para que se obtenha uma fórmula geral (JENSEN, 2011).

Uma equação de diferenças de ordem 2, linear, é escrita deste modo (SILVA, 2016):

$$x(n+2) + b(n)x(n+1) + c(n)x(n) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4)$$

ou

$$x(n) + b(n)x(n-1) + c(n)x(n-2) = f(n-2), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5)$$

sendo, $b(n)$, $c(n)$ e $f(n)$ sequências. No caso de $f(n) = 0$, para qualquer n , tem-se a equação de diferenças linear de segunda ordem homogênea. Assim:

$$x(n+2) + b(n)x(n+1) + c(n)x(n) = 0 \quad (6)$$

Supõe-se que $x(n) = k\lambda^n$ seja uma solução geral para a equação (5) e, substituindo-se $x(n) = k\lambda^n$ na equação (5), tem-se:

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (7)$$

A partir do polinômio característico obtido em (7), é possível se conseguir alguns tipos de soluções para equações de diferenças lineares de segunda ordem, como se segue:

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução de $p_2(\lambda)$ é dada pela fórmula $x(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$;
- se $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, a solução de $p_2(\lambda)$ é dada pela fórmula $x(n) = c_1 \alpha^n + nc_2 \alpha^n$;
- se λ_i com $i = 1, 2$ forem complexos, as raízes de $p_2(\lambda)$ são $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$ (par complexo conjugado) e a solução é a seguinte: $x(n) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, sendo: $y_1 = r^n \cos(n\theta)$ e $y_2 = r^n \sin(n\theta)$; $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\theta = \arctg(b/a)$, $a \neq 0$ e $\theta = \pi/2$ se $a = 0$; c_1 e c_2 dependem das condições iniciais.

Exemplo (JENSEN, 2011 - Adaptado): Considere-se a equação de diferenças linear de segunda ordem a seguir:

$$x(n+2) - x(n+1) - x(n) = 0$$

Calcule sua solução com as seguintes condições iniciais: $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$.

Resolução:

A equação característica $r^2 - r - 1 = 0$ possui as raízes:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Assim, sua solução geral é a seguinte:

$$x(n) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

A solução particular, com as condições iniciais: $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$, é denominada de Sequência de Fibonacci F_n , onde:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad \blacksquare$$

Equações de Diferenças Não-Lineares.

A notação de uma equação de diferenças não-linear, é feita desta maneira:

$$x(n+1) = g(x(n)) \quad (8)$$

na qual $g(x(n))$ é uma função que não obedece ao princípio da superposição.

Não é possível, de modo geral, se obter modelos/fórmulas explícitos(as) para a solução, embora os valores de $x(n+1)$ possam ser obtidos recursivamente ou por meio de sucessivas iterações. Mas, há possibilidade de se transformar uma Equação de Diferenças não-linear numa Equação de Diferenças linear por meio de uma mudança de variáveis, em alguns casos específicos. A linearização da seguinte Equação de Diferenças não-linear (NICOLAU, 2003):

$$x(n) = [x(n-1)]^\alpha + [x(n-2)]^\beta \quad (9)$$

pode ser feita por meio da mudança de variável $z(n) = \ln[x(n)]$. Deste modo:

$$z(n) = \alpha z(n-1) + \beta z(n-2) \quad (10)$$

e, com essa solução de $z(n)$, a solução $x(n)$ é obtida por: $x(n) = e^{z(n)}$.

Exemplo: No material de Nicolau (2003), no exercício 6, item (b), é solicitada solução da seguinte equação: $x(n+2) = x(n+1) + x(n)^2$.

Resolução: Deve ser usada a seguinte transformação logarítmica: $z(n) = \ln[x(n)]$. A nova equação estará escrita da seguinte maneira: $z(n+2) - z(n+1) - 2z(n) = 0$. Esta é uma Equação de Diferenças linear de 2ª ordem homogênea. Daí, adota-se a metodologia específica desta Equação de diferenças, como segue: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

As raízes deste polinômio de 2º grau são: $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -4$. Assim: $z(n) = c_1 \cdot 5^n + c_2 \cdot (-4)^n$, e, a solução de $x(n)$ será:

$$x(n) = e^{c_1 \cdot 5^n} \cdot e^{c_2 \cdot (-4)^n}$$

Ainda há outros métodos para a resolução, como o exposto no trabalho de Villate (2001), que, no caso de Equações Diferenciais com coeficientes variáveis, é útil a função gama ($\Gamma(x)$), que é uma função especial definida por meio de integral. Essa função é uma generalização do fatorial, uma vez verificada a seguinte propriedade $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

No caso dos coeficientes da equação não linear incluem produtos e quocientes de fatores lineares, por exemplo, cada fator pode ser escrito de forma a se agrupar termos com a mesma ordem e, assim, obtém-se uma equação redutível a equação de coeficientes constantes.

De modo qualitativo, é feito, também, o estudo desta Equação de Diferenças ao se encontrar um ponto de equilíbrio, isto é, define-se um ponto fixo x_0 tal que $f(x_0) = x_0$, cujos detalhes de critérios de estabilidade estão expostos no trabalho de Silva (2016).

3 METODOLOGIA.

O presente artigo foi elaborado a partir de uma revisão bibliográfica nas bases de dados: *Google Scholar* (Explorador de publicações em revistas Internacionais da plataforma de buscas na *Internet*), *SciELO* e nas bases que contemplam artigos de congressos e/ou publicações conclusivas de teses e/ou dissertações. As palavras-chave empregadas foram “Equações de Diferenças”, “Controle PID” e “Filtros Digitais”, sendo que as últimas se empregam dos conceitos de equações de diferenças na área de Engenharia/Estatística. Definiram-se como critérios de exclusão artigos publicados antes do ano 2000, a não ser os que não tenham relevância, e que não se demonstrassem artigos utilizados em implementações e estudos com base nas Equações de Diferenças. A pesquisa dos artigos foi realizada entre março e a primeira semana de abril de 2021.

A busca nos bancos de dados foi realizada utilizando as terminologias e notações de Engenharia de Automação, Física e de Sistemas Dinâmicos em tópicos multidisciplinares comuns em português e inglês. As palavras-chave utilizadas na busca foram: Equações de Diferenças, Sistemas Dinâmicos Discretos, Controle Proporcional-Integral-Derivativo e Filtros Digitais.

Os critérios de inclusão para os estudos encontrados foram à abordagem do emprego de Equações de Diferenças em diversos Sistemas Dinâmicos, de ensaio ou não, com base na estrutura do

algoritmo, na sua ordem e no tipo (homogênea/não-homogênea). Foram excluídos estudos que relatavam o emprego de outras modalidades de implementação, que não os que tratam de Equações de Diferenças (Equações Diferenciais, p. e.).

A seguir, buscou-se estudar e compreender os principais parâmetros e forma de aplicação empregados nos estudos encontrados, de acordo com as bases de dados, para a utilização de Equações Diferenciais, bem como o mecanismo e modelo de Sistemas Dinâmicos Discretos que se traduzem em algoritmos computacionais e/ou de cálculo propriamente dito.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.

Serão apresentadas, a seguir, as sínteses analíticas de alguns trabalhos que foram fundamentais na realização de tal pesquisa no sentido de se consolidar os resultados e as discussões a respeito da revisão. Resumidamente, abordaram-se 6 (seis) artigos sobre aplicações relativas a Equações de Diferenças e 4 (quatro) artigos que versaram sobre ensino dos conceitos das Equações de Diferenças, e que ambos os temas têm relação direta em aplicações em diversas áreas do conhecimento.

O trabalho de conclusão de curso apresentado por Bacelar e Da Silva (2016) tratou do estudo das equações de diferença linear e não linear (de primeira e segunda ordem), sistemas de equações lineares e sistemas de equações não lineares e aplicações, as equações de diferença tem um papel importante (fundamental), pois ao construir um modelo matemático interessa escolher uma variável que assume valores discretos. Assim ocorre, como exemplo, com o tempo, já que é comum realizar medições regulares na hora de controlar um experimento. Estes dados constituem um conjunto finito, ou infinito contável, de valores da variável independente. Para este tipo de modelo determinístico discreto, as ferramentas matemáticas mais adequadas para analisarmos são as equações de diferença e os sistemas de diferença. O presente tema é uma breve introdução a seu estudo. Iniciou-se com os conceitos e definições básicas e se concentrou no estudo das equações de diferença lineares de primeira e segunda ordem com coeficientes constantes, assim como nos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem e segunda ordem com coeficientes constantes e aplicações das equações de diferença não linear e sistemas não linear usou-se o modelo de Nicholson-Bailey que é um modelo para a resolução do sistema hospedeiro-parasita, cujo sistema de equações de diferenças não-linear é o seguinte:

$$N_{t+1} = \lambda N_t \cdot f(N_t, P_t) \quad (1)$$

$$P_{t+1} = c N_t \cdot (1-f(N_t, P_t))$$

Os parâmetros são os seguintes: N_t = quantidade de hospedeiro na geração t ; P_t = quantidade de parasitas na geração t ; $f = f(N_t, P_t)$ = fração dos hospedeiros não parasitados; λ = taxa reprodução do hospedeiro; c = número médio de ovos depositados por um parasita em um único hospedeiro. Ao se solucionar tal sistema de equações de diferenças, infere-se que os pontos de equilíbrio de N e P não são estáveis. Portanto, os resultados apresentados mostraram que, como toda a matemática, as Equações de Diferença Linear e Não Linear tem seu valor relevante perante a sociedade, visto que sua descoberta foi um dos maiores avanços, tanto para a matemática quanto para o mundo.

No trabalho de Felix (2018), apresentou-se as equações definidas por recorrência e sua relação com as sequências numéricas na Educação Básica, entre as equações definidas por

recorrência foram destacadas as Equações de Diferenças. Equações de Diferenças descrevem o comportamento de fenômenos cuja variação em cada intervalo de tempo ocorra de forma discreta e cada novo evento depende de um ou mais eventos anteriores. Inúmeros problemas podem ser modelados matematicamente utilizando as equações de diferenças, sendo assim elas podem ser aplicadas à diversas áreas do conhecimento para a resolução de diversos problemas. Um exemplo tratado pelo autor é a equação do Modelo Populacional de Espécies Únicas, descrita da seguinte maneira:

$$N_{k+1} = N_k R(N_k), R(0) > 0 \dots\dots\dots(2)$$

Os parâmetros são os seguintes:

N_k : população da k -ésima geração; e
 $R(N_k)$: taxa de natalidade.

Deste trabalho, pode-se concluir que o propósito desta dissertação apresentado na sua introdução foi atendido.

A dissertação de Luís (2006) afirma que sistemas dinâmicos são todos os sistemas que evoluem no tempo, qualquer que seja a sua natureza, isto é, sistemas físicos, biológicos, químicos, sociais, econômicos etc. Esta evolução pode ser descrita (modelada) por equações de diferenças, uma vez que esse tempo é muitas vezes medido em intervalos discretos. As equações de diferenças aparecem também quando se estuda métodos para a discretização de equações diferenciais. Assim, este trabalho tem por principal objetivo estudar as soluções de alguns tipos de equações de diferenças. Para isso, começa-se por introduzir o conceito de diferença e a sua relação com as equações de diferenças. Em seguida, determina-se a solução geral das todas as equações lineares de primeira ordem, bem como o estudo do seu comportamento assintótico. Prossegue-se, desenvolvendo as principais técnicas para determinar a solução de equações de diferenças lineares de qualquer ordem. Em particular, estudam-se as equações com coeficientes constantes. Depois de se desenvolver a teoria básica dos sistemas equações de diferenças lineares, particulariza-se aos sistemas lineares autônomos, com apenas duas variáveis dependentes, fazendo assim o estudo do comportamento das soluções no plano de fases. Por fim, utiliza-se a transformada z como uma ferramenta que permite resolver equações de diferenças, em especial as equações de tipo convolução.

O projeto de (SUZUKI; NETO, 2016) previu a concepção de um sistema de controle fabril para manter a temperatura ambiente, sendo o controlador utilizado uma ferramenta amplamente utilizada em ambientes industriais, nomeadamente proporcional, integral e derivado (PID). Para completar o sistema, foi utilizada uma placa eletrônica baseada no microcontrolador Atmel ATmega328 em conjunto com um sensor de circuito integrado LM35 capaz de detectar mudanças térmicas. Desta forma, além dos conceitos eletrônicos das partes analógica e digital e da estrutura de programação da linguagem C / C ++, o problema do processamento digital de sinais também foi resolvido. Todos os conceitos foram aplicados para gerar gráficos matemáticos ao longo do tempo. O algoritmo de controle implementado no modelo de equações de diferenças é o seguinte:

$$u[n] = Kp \cdot e[n] + \frac{Ki \cdot T_a}{2} \left\{ \sum_0^n e[n-1] + \sum_0^n e[n] \right\} + Kd \cdot \frac{e[n] - e[n-1]}{T_a} \quad (3)$$

Os parâmetros constantes na equação anterior são os seguintes:

Kp: Coeficiente da ação proporcional;

Ki: Coeficiente da ação integral;

Kd: Coeficiente da ação derivativa;

Ta: Período de amostragem; n: Amostra a ser processada;

u[n]: Sinal de saída do sistema na amostra n; e[n]: Sinal de erro na entrada do controlador na amostra n;

e[n-1]: Sinal de erro na entrada do controlador na amostra n-1; na qual se define uma equação de diferenças de segunda ordem.

Deste modo, esse artigo (SUZUKI; NETO, 2016) proporcionou uma rápida apresentação de como um controlador PID pode ser implementado, da maneira mais objetiva possível, para um sistema cuja a função de transferência do processo a ser controlado é desconhecida.

Esse trabalho de (BROSLER, 2014) propôs uma construção de controlador PID de baixo custo com Microprocessador PIC e sua aplicação em sistemas de posicionamento previamente controlados. O controle de posicionamento é realizado por um circuito integrado de aplicação específica. Ao aplicar tais controles, a instabilidade do sistema PID de malha fechada foi minimizada, trazendo em comparação com o sistema com a função a seguir, a resposta é mais suave e a vibração e o desgaste mecânico são eliminados. A função de controle de um circuito dedicado é muito limitada. O atuador na saída é um motor DC. Sua velocidade é controlada pela tecnologia de modulação por largura de pulso (PWM). O uso da ponte H permite a rotação bidirecional. O microcontrolador usado é o PIC16F684, que já possui um módulo PWM interno, sua entrada analógica é usada como referência e retroalimentação de posição. O sensor de posição usado é o potenciômetro multivoltas e é conectado ao eixo do motor por meio de um conjunto de engrenagens. O algoritmo recursivo de controle PID é dado pela seguinte equação de diferenças:

$$u(kT) = Kp \cdot e(kT) + \frac{Kd}{T} \cdot [e(kT) - e(kT - T)] + u_i(kT - T) + \frac{Ki \cdot T}{2} [e(kT - T) + e(kT)] \quad (4)$$

Os parâmetros constantes na equação anterior são os seguintes: Kp . $e(kT)$ representa a ação de controle proporcional com seu respectivo ganho Kp . Já $Kd/T[e(kT) - e(kT - T)]$ caracteriza a ação de controle derivativo com ganho Kd , enquanto $Ki \cdot T/2[e(kT - T) + e(kT)]$ representa a ação de controle integral com ganho Ki ; $e(kT)$ representa o erro entre o valor de referência e o valor detectado pelo sensor no processo fabril; T representa o tempo de amostragem do ciclo de processamento do microcontrolador; $u_i(kT - T)$ é a porção acumulada da ação integral.

Depreendeu-se, nesse trabalho de (BROSLER, 2014) que o controle PID é realmente eficiente no controle de processos industriais, e a sua implementação em sistemas digitais, sejam eles de alta

capacidade ou embarcados e de baixo custo, como no caso do PIC, é possível e traz resultados satisfatórios quanto a desempenho, custo e versatilidade.

Este estudo de (FREITAS; SILVA, 2015) usou modelos teóricos e empírico baseados na equação de diferenças, equações de regressão finita e linear para analisar tendências do mercado de seguro saúde suplementar no Brasil. A resolução do modelo do sistema de equações a diferenças limitada cria três cenários possíveis de mercado: primeiro, haverá um crescimento ilimitado de recursos à disposição do setor; em segundo lugar, haveria estabilidade, dada a complementaridade da soma da fração da despesa com a fração do lucro, ambas calculadas sobre a receita: os recursos disponíveis no setor se situariam em torno do volume da contribuição inicial paga pelos indivíduos, estimada por regressão linear; finalmente, no terceiro caso, o sistema foi a exaustão. As equações de diferenças do modelo proposto desse trabalho são as seguintes:

$$R_t = C_t - U_t \quad (5)$$

$$U_t = \alpha C_{t-1} \quad (6)$$

$$R_t = \beta C_t \quad (7)$$

$$C_t = (\alpha / (1 - \beta)) \cdot C_{t-1} \quad (8)$$

Os parâmetros dados nas equações anteriores são os seguintes: R_t representa o resultado ou lucro disponível das administradoras de saúde; U_t é o volume de despesas das operadoras; C_t simboliza a contribuição pecuniária do beneficiário; α representa o coeficiente do volume de despesas da operadora em razão de uma contribuição do período anterior; β o coeficiente de resultados, cujo valor varia entre 0 e 1.

Os resultados mostram que o sistema é sustentável no longo prazo, no caso de $\alpha + \beta > 1$.

Essa nota técnica de Hammond Junior (1970) revisa e consolida o material pertencente a métodos numéricos de passo único e multipassos com o objetivo de desenvolver um método atraente para avaliar o erro resultante do uso de equações de diferenças para aproximar as equações diferenciais ordinárias. Uma relação aproximada tratável é desenvolvida entre o erro devido às taxas de amostragem de acabamento e os parâmetros que descrevem métodos numéricos. Os resultados são válidos para um pequeno valor do produto da amostragem, h , e frequências naturais λ , do sistema analógico. A abordagem utilizada para aproximar o sistema analógico por modos isolados e o algoritmo digital para cada modo por sua ordem, p , e certas constantes $C, A_0, \dots, A_p$. Os resultados mostram que a aproximação de um sistema analógico por um algoritmo digital resulta em um deslocamento de cada raiz e ocorre um erro em cada função de força. O deslocamento da raiz é dado por $-Ch^p \lambda^p$, enquanto o outro é dado por cada função de força $\gamma e^{i\omega t}$, é dado pela equação 1.

$$-Ch^p \sum_{i=0}^p A_i \lambda^i \omega^{p-i} \quad (9)$$

Os resultados do estudo são aplicados a um problema de análise numérica não trivial, um problema de filtro digital e a uma elucidação do problema de equações “rígidas”.

O artigo de Martins, Costa, Franzen e Reis (2003) descreve a realização de um filtro digital com o objetivo de possibilitar a utilização de um dispositivo de sensoriamento óptico além de suas especificações. O trabalho inicia com a descrição de um sistema de contagem de sementes miúdas e

depois aborda a utilização do filtro digital implementado em um microcontrolador, como forma de captar o sinal produzido pela passagem de uma semente por um sensor óptico.

Antes de filtrar as parcelas de alta frequência, o sinal passa por um filtro de média móvel, que consiste em um sistema linear invariante no tempo (LIT), que tem resposta impulsional finita (FIR) e demanda de valores de entrada futuras. Como o próprio nome indica, o filtro de média móvel tira uma média, que vai se alterando, entre os valores do sinal em questão. Considerando $M_1=0$ (Medida 1 igual a zero) por ser um modelo causal, tem-se:

$$y[n] = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n-k] \quad \dots\dots\dots(10)$$

Esse projeto, de acordo com os resultados empíricos, mostrou-se confiável e preciso, com erro funcional menor que 1%, em conformidade com as especificações.

Neste trabalho de Valle (2016), foi apresentada uma abordagem inicial sobre teoria de equações de diferença, sendo o foco o estudo da estabilidade. Inicialmente, foram tratadas das equações de diferenças escalares lineares, homogêneas e não-homogêneas, definindo solução geral para cada um dos casos e elencando alguns resultados sobre comportamentos e suas soluções; foram citadas também algumas técnicas de linearização. Na sequência, estudou-se a solução geral de sistemas homogêneos não-homogêneos de equações de diferenças lineares. Posteriormente, apresentou-se teoremas sobre estabilidade para equações de diferença vetoriais lineares e não-lineares. Por fim, foram abordadas algumas aplicações dos itens estudados, modelando problemas nas áreas de Biologia, Economia, Sistemas de Informação e Física. No caso último, a Equação do Calor foi abordada nos termos de equações de diferenças, cuja expressão é a seguinte (para um dado comprimento em torno de x_i):

$$T_i(n+1) = \alpha T_{i-1}(n) + (1-2\alpha)T_i(n) + \alpha T_{i+1}(n) \quad \dots\dots\dots (11)$$

Os parâmetros constantes na equação são os seguintes: $x_1, x_2, \dots, x_k$, k pontos equidistantes na barra, e $T_i(n)$ a temperatura no ponto x_i , $i = 1, \dots, k$ no instante n . As temperaturas nas extremidades direita esquerda da barra são denotadas por $T_0(n)$ e $T_{k+1}(n)$, respectivamente. É considerada a distribuição do calor através de uma barra fina composta por material homogêneo.

Destarte, a teoria de equações de diferença faz jus à tal singularidade da matemática, ultrapassando tais limites podendo ser aplicada em áreas do conhecimento como biologia e economia.

No trabalho de (ALVES; GARCIA, 2020), foi descrito que, no Brasil, as últimas décadas foram de transformações para o país no campo demográfico. Estudos sobre a dinâmica da população brasileira fazem-se relevantes para apoiar tomadas de decisões em diversas áreas do conhecimento. Os dados levantados acerca de uma população igualmente estão ligados a planejamentos e ações sociais principalmente nas áreas de previdência e saúde. Nesta conjuntura, o foco deste trabalho foi utilizar dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) referentes à população do Brasil para gerar projeções demográficas por meio de modelos matemáticos de dinâmica populacional

(discretos, contínuo e estocástico). Em seguida a implementação computacional, comparações entre os resultados dos modelos e os dados oficiais do IBGE foram realizadas. Por fim, as simulações apresentaram-se satisfatórias quando comparadas às previsões do IBGE e adequadas para se obter algumas características futuras da população estudada. A equação de diferenças estudada foi a de modelo malthusiano de estimativa populacional, que se segue:

$$P_t = (1+n-m)P_{t-1} + \Delta P_t \quad (12)$$

Os parâmetros que se seguem na equação anterior são os seguintes: P_t : número de indivíduos de uma população em um determinado tempo discreto t ; n : taxa de fertilidade; m : taxa de mortalidade; ΔP_t : extrapolação dos dados de natalidade e mortalidade. A aplicabilidade na população brasileira é justificável, por exemplo, pelos recentes fatos, uma vez que se dão surgimentos de epidemias de *Zika* em 2015 – 2016, CoViD-19 em 2020 e a presente imigração venezuelana.

Deste modo, é viável incorporar aspectos imprevisíveis na dinâmica de populações, adicionando um ruído branco na taxa de crescimento intraespecífica da equação diferencial e, conseqüentemente, na equação de diferenças do modelo.

Portanto, os 10 (dez) autores dos quais descreveram as implementações das Equações de Diferenças, trabalharam com a abundância suficiente de informações relativas aos conceitos deste modelo, e, a aplicação desta Equação em diversas áreas do conhecimento, desde Economia, passando pela Engenharia Elétrica, Física e Biologia. De fato, pode-se denotar modelos matemáticos conceituados em variáveis discretas. Sessenta por cento (60%) destes descreveram modelos matemáticos diversos e, quarenta por cento (40%) na área de Ensino de Matemática, exemplificando diversas modelagens resolvidas. No entanto, dentre os que retrataram trabalhos relativos ao Ensino de Matemática, nenhum mostrou e/ou exemplificou alguma aplicação das Equações de Diferenças vertida ao Ensino Fundamental (ao menos o 9º ano) com o modelo de Juros Compostos. Dentre os de Engenharia e os de Ensino, nenhum também proveu informações relativas ao algoritmo de Controle de Sistemas Automáticos, denominado Controle PID (Proporcional-Integral-Derivativo), mesmo que se testem cada bloco deste algoritmo em Sistemas Embarcados (Microcontroladores PIC e/ou Arduino, p.e.).

5 CONCLUSÃO.

Ao analisar as pesquisas revisadas, percebe-se que, de fato, há um consenso entre os autores no que tange a implementação e uso dos conceitos e propriedades das Equações de Diferenças em diversas áreas do conhecimento, perpassa por essas áreas e, não obstante, terem utilizado abordagens e denominações distintas.

Nos estudos analisados, os autores com vertentes da área de ensino, não descreveram sobre a conceituação de Equações de Diferenças nem para Ensino Fundamental, nem para Ensino Médio-Técnico como, por exemplo, estudos envolvendo situações de Juros Compostos.

Nesse contexto, em nenhum momento os pesquisadores se referiram aos desenvolvimentos, implementações e validações de Equações de Diferenças em razão de se extrair um modelo para Controle de Sistemas Automáticos baseado em Algoritmo Proporcional-Integral-Derivativo (PID), para estudos na área técnica em Automação/Mecatrônica.

Com base na revisão apresentada, pode-se afirmar que poucos estudos têm sido realizados na área de Sistemas Automáticos de Controle, no espectro da área Técnico-Profissional, e que cada pesquisador utilizou uma metodologia de implementação dos conceitos de Equações de Diferença distinta.

Salienta-se, desta forma, a importância de realizar outras pesquisas sobre estes temas para que os que se usam do entendimento das Equações de Diferenças possam aplicar tais conceitos no espectro mencionado no sentido de se prover um melhor entendimento sobre o algoritmo e quais os efeitos deste nos Sistemas Automáticos de Controle de Processos ou em estruturas financeiras baseadas em juros compostos discretos, por exemplo.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao Pai das luzes, por todas as coisas. Aos meus pais, Vivaldo (*in memoriam*) e Marta, pela boa formação familiar e pessoal, e, a minha esposa, Evania, pela, paciência e apoio nesta pesquisa.

6 REFERÊNCIAS.

ALVES, M. S.; GARCIA, R. O. Modelos de crescimento discreto, contínuo e estocástico: um comparativo entre as dinâmicas populacionais do Brasil. C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 19, p. 102–113, dez. 2020. Edição Iniciação Científica. DOI: 10.21167/cqdvol19ic201023169664msarog102113 disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd/. Acesso em 02 abr. 2021.

BACELAR, Benedita Rosilene Beltrão; DA SILVA, Marciele do Amaral. Estudos das equações de diferenças e aplicações. Trabalho de conclusão de curso de Licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal do Amapá. Orientador, Guzmán Eulálio Isla Chamilco. Macapá, 2016. 39p.

BROSLER, Rodrigo Oliveira. Controlador PID utilizando Microcontrolador PIC. Trabalho de Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014.

DICIO (org.). Significado de Discretização. 2009. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/discretizacao/#:~:text=substantivo%20feminino%20Ato%20de%20discretizar,uma%20unidade%20cont%C3%ADua%20e%20discreta>. Acesso em: 05 mar. 2021.

FELIX, Elton. *Equações de Diferenças: Uma Abordagem mais completa para o Ensino de Sequências no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. Joinville, 2018. 128 p.

FREITAS, Maurício Assuero Lima de; SILVA, Alexandre Stamford da. MODELO DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS FINITAS APLICADO AO SISTEMA DE SAÚDE SUPLEMENTAR. *Trab. educ. saúde*, Rio de Janeiro, v. 13, n. 3, p. 797-818, dez. 2015. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1981-77462015000300797&lng=pt&nrm=iso>. Acessos em 29 mar. 2021. <https://doi.org/10.1590/1981-7746-sip00055>.

HAMMOND JUNIOR, Joseph L. *Difference Equations to Approximate Ordinary Differential Equations*. Atlanta: Georgia Institute of Technology - School of Electrical Engineering. Nota técnica nº 22. Set., 1970.

JENSEN, Arne. *Lecture Notes on Difference Equations*. 2011. Notas de Aula - Departamento de Ciências Matemáticas da Universidade de Aalborg. Disponível em: <https://people.math.aau.dk/~cornean/IMM_E12/notes2011a.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2021.

LUÍS, Rafael Domingos Garanito. *Equações de Diferenças e Aplicações*. Dissertação de Mestrado - Área De Especialização em Matemática para o Ensino. Funchal, 2006.

MARTINS, Carlos F.; COSTA, Ricardo L. da; FRANZEN, Tiago A.; REIS, Ângelo V. dos. APLICAÇÃO DE UM FILTRO DIGITAL IMPLEMENTADO EM MICROCONTROLADOR PARA SENSORIAMENTO ÓPTICO. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Florianópolis, p. 1-5, abr. 2003. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/nimeq/files/2011/04/artigo_SBAI-2003.pdf. Acesso em: 31 mar. 2021.

NICOLAU, João. *Equações Diferenciais & Equações às Diferenças*. 2003. Notas de Equações Diferenciais (2º ano) da Licenciatura de Matemática Aplicada à Economia e Gestão - Universidade Técnica de Lisboa. Disponível em: http://www.arquivoscolar.org/bitstream/arquivo-e/56/1/ED_2.pdf. Acesso em: 06 mar. 2021.

SUZUKI, W.; NETO, E. CONTROLE PID UTILIZANDO O ARDUINO. *Revista Científica e-Locução*, v. 1, n. 10, p. 17, 30 dez. 2016.

VALLE, Jaqueline. *Equações de Diferenças e Teoria de Estabilidade*. 2016. 127 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação - Licenciatura em Matemática) Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2016.

VILLATE, Jaime E. *Equações Diferenciais e Equações de Diferenças*. 2001. Apostila - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Disponível em: <<https://docs.ufpr.br/~jcvb/online/eqdiferenciais.pdf>> Acesso em: 06 mar. 2021.